
刚体转动惯量的测量

转动惯量实验是刚体转动中惯性大小的量度。它取决于刚体的总质量，质量分布、形状大小和转轴位置。对于形状简单，质量均匀分布的刚体，可以通过数学方法计算出它绕特定转轴的转动惯量，但对于形状比较复杂，或质量分布不均匀的刚体，用数学方法计算其转动惯量是非常困难的，因而大多采用实验方法来测定。

切变模量与转动惯量实验仪，在涉及刚体转动的机电制造、航空、航天、航海、军工等工程技术和科学研究中具有十分重要的意义。测定转动惯量常采用扭摆法或恒力矩转动法，本实验采用恒力矩转动法测定转动惯量。

【实验目的】

1. 学习用恒力矩转动法测定刚体转动惯量的原理和方法；
2. 观测刚体的转动惯量随其质量、质量分布及转轴不同而改变的情况，验证平行轴定理；
3. 学会使用通用计时计数器测量时间。

【实验原理】

1. 恒力矩转动法测定转动惯量的原理

根据刚体的定轴转动定律：

$$M = J\beta \quad (1)$$

只要测定刚体转动时所受的总合外力矩 M 及该力矩作用下刚体转动的角加速度 β ，则可计算出该刚体的转动惯量 J 。

设以某初始角速度转动的空实验台转动惯量为 J_1 ，未加砝码时，在摩擦阻力矩 M_μ 的作用下，实验台将以角加速度 β_1 作匀减速运动，即：

$$-M_\mu = J_1\beta_1 \quad (2)$$

将质量为 m 的砝码用细线绕在半径为 R 的实验台塔轮上，并让砝码下落，系统在恒外力作用下将作匀加速运动。若砝码的加速度为 a ，则细线所受张力为 $T = m(g - a)$ 。若此时实验台的角加速度为 β_2 ，则有 $a = R\beta_2$ 。细线施加给实验台的力矩为 $TR = m(g - R\beta_2)R$ ，此时有：

$$m(g - R\beta_2)R - M_\mu = J_1\beta_2 \quad (3)$$

将 (2)、(3) 两式联立消去摩擦力矩 M_μ 后，可得：

$$J_1 = \frac{mR(g - R\beta_2)}{\beta_2 - \beta_1} \quad (4)$$

同理，若在实验台上加上被测物体后系统的转动惯量为 J_2 ，加砝码前后的角加速度分别为 β_3 与 β_4 ，则有：

$$J_2 = \frac{mR(g - R\beta_4)}{\beta_4 - \beta_3} \quad (5)$$

由转动惯量的迭加原理可知，被测试件的转动惯量 J_3 为：

$$J_3 = J_2 - J_1 \quad (6)$$

测得 R 、 m 及 β_1 、 β_2 、 β_3 、 β_4 ，由 (4)，(5)，(6) 式即可计算被测试件的转动惯量。

2. β 的测量

实验中采用通用计时计数器记录遮挡次数和相应的时间。固定在载物台圆周边缘相差 π 角的两遮光细棒，每转动半圈遮挡一次固定在底座上的光电门，即产生一个计数光电脉冲，计数器记下遮挡次数 k 和相应的时间 t 。若从第一次挡光 ($k=0$, $t=0$) 开始计次，计时，且初始角速度为 ω_0 ，则对于匀变速运动中测量得到的任意两组数据 (k_m , t_m)、(k_n , t_n)，相应的角位移 θ_m 、 θ_n 分别为：

$$\theta_m = k_m \pi = \omega_0 t_m + \frac{1}{2} \beta t_m^2 \quad (7)$$

$$\theta_n = k_n \pi = \omega_0 t_n + \frac{1}{2} \beta t_n^2 \quad (8)$$

从 (7)、(8) 两式中消去初始角速度 ω_0 ，可得：

$$\beta = \frac{2\pi(k_n t_m - k_m t_n)}{t_n^2 t_m - t_m^2 t_n} \quad (9)$$

由 (9) 式即可计算角加速度 β 。

3. 平行轴定理

理论分析表明，质量为 m 的物体围绕通过质心 O 的转轴转动时的转动惯量 J_0 最小。当转轴平行移动距离 d 后，绕新转轴转动的转动惯量为：

$$J = J_0 + md^2 \quad (10)$$

4. 圆盘圆环的转动惯量

对于形状简单、质量分布均匀的刚体，通过数学方法可以很容易的计算出它绕特定转轴的转动惯量。

圆盘、圆柱绕几何中心轴转动的转动惯量理论值为：

$$J = \frac{1}{2} mR^2 \quad (11)$$

圆环绕几何中心轴的转动惯量理论值为：

$$J = \frac{m}{2} (R_{\text{外}}^2 + R_{\text{内}}^2) \quad (12)$$

【实验仪器】

COC-GT/JS 切变模量与转动惯量实验仪、薄圆盘、圆环、圆柱体、砝码、细线。

1. 刚体转动惯量实验仪

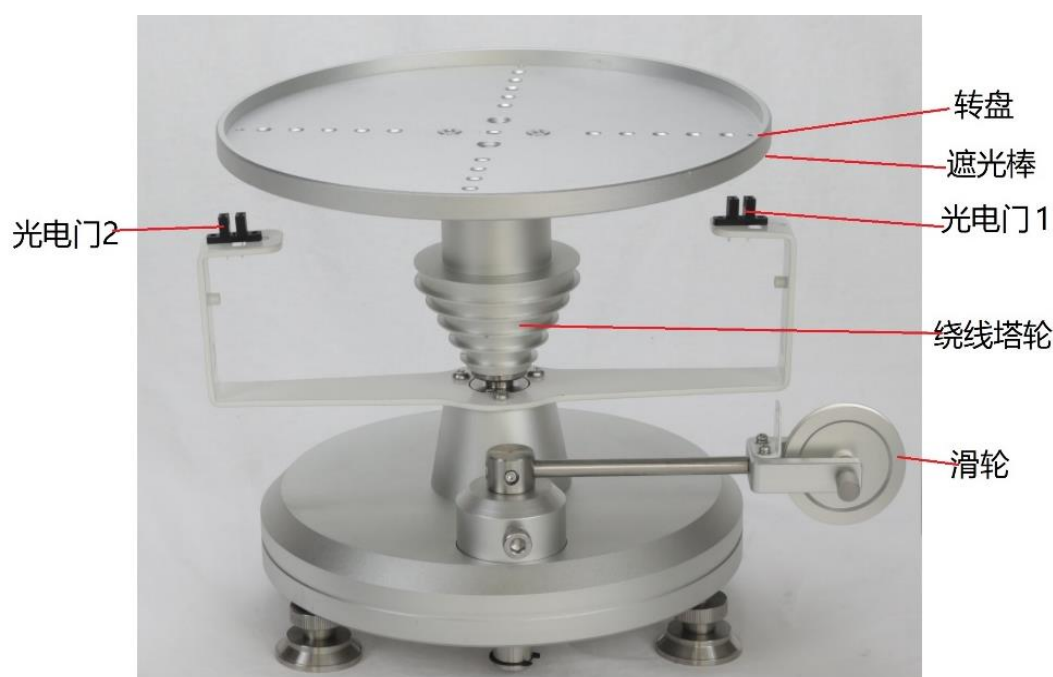


图 1 转动惯量实验组合仪

刚体转动惯量实验仪如图 1 所示，绕线塔轮通过特制的轴承安装在主轴上，使转动时的摩擦力矩很小。塔轮半径为 15, 20, 25, 30, 35mm 共 5 挡，可与大约 5g 的砝码托及 1 个 5g, 4 个 10g 的砝码组合，产生大小不同的力矩。载物台用螺钉与塔轮连接在一起，随塔轮转动。随仪器配的被测试样有 1 个圆盘，1 个圆环，两个圆柱；试样上标有几何尺寸及质量，便于将转动惯量的测试值与理论计算值比较。圆柱试样可插入载物台上的不同孔，这些孔离中心的距离分别为 45, 60, 75, 90, 105mm，便于验证平行轴定理。铝制小滑轮的转动惯量与实验台相比可忽略不计。实验台两侧各有一个光电门，可根据实际情况随意选取一个接口与通用计时计数器相连。

2. 通用计时计数器

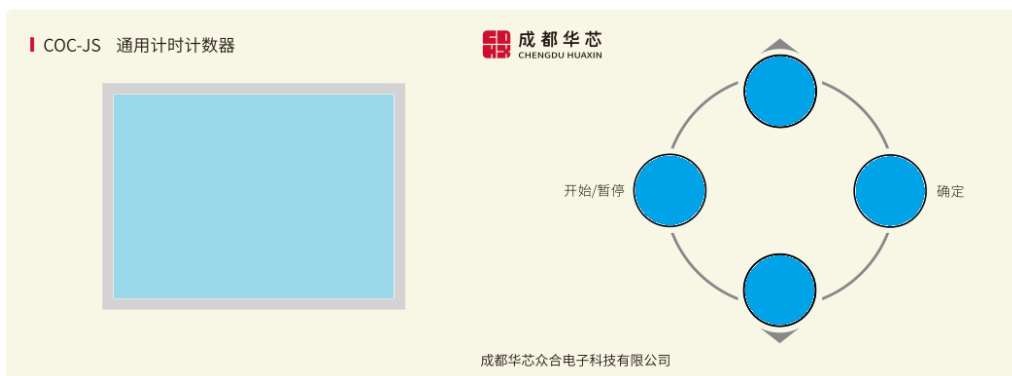


图 2 通用计时计数器

通用计时计数器前面板如图 2 所示，连接电源和光电门，开启电源，将光标移至“总周期”位置，按下“确定”，可通过上下按钮对测量的总周期数进行设置，设置完成后按下“确定”按钮进行保存。

按下“开始/暂停”按钮后，仪器进入计时准备状态，当接收到光电门发来的第一个信号后开始计时，每接收一个信号为一周期，当接收的信号数达到设定的总周期数后，计时自动停止。

移动光标至“第 周期”，按下“确定”后，可使用上下键对记录的各周期数的总时间进行回查。

查看结束后，按下“确定”按钮使光标回到上一级位置，此时按下“开始/暂停”按钮，上一次记录的数据清零，仪器再次进入计时准备状态。

【实验内容与步骤】

1. 实验准备

在桌面上放置转动惯量实验仪，并利用基座上的三颗调平螺钉，将仪器调平。将滑轮支架固定在实验台面边缘，调整滑轮高度及方位，使滑轮槽与选取的绕线塔轮槽等高，且其方位相互垂直。并且用数据线将通用计时计数器接口与转动惯量实验仪其中一个光电门相连。

2. 测量并计算实验台的转动惯量 J_I

(1) 测量 β_I

1. 打开通用计时计数器，设置总周期数为 10；
2. 用手轻轻拨动载物台，使实验台有一初始转速并在摩擦阻力矩作用下作匀减速运动；
3. 迅速按下“开始/暂停”按钮，通用计时计数器会在下一次接收到挡光信号时开始计时和计数，并在记录完预设的 15 个信号后停止计时和计数；
4. 将光标移至“第 周期”栏，查看各计时周期的时间，并将数据记入表 1 中；
5. 采用逐差法处理数据，将第 1 和第 5 组，第 2 和第 6 组……,分别组成 4 组，用 (9)

式计算对应各组的 β_1 值，然后求其平均值作为 β_1 的测量值。

(2) 测量 β_2

1. 选择塔轮半径 R 及砝码质量，将一端打结的细线沿塔轮上开的细缝塞入，并且不重叠的密绕于所选定半径的轮上，细线另一端通过滑轮后连接砝码托上的挂钩，用手将载物台稳住；
2. 按下通用计时计数器的“开始/暂停”按钮，进入计时准备状态；
3. 释放载物台，砝码重力产生的恒力矩使实验台产生匀加速转动；
4. 记录 8 组数据后停止测量。查阅、记录数据于表 1 中并计算 β_2 的测量值。
5. 由（4）式即可算出 J_1 的值。

3. 测量不同试样的转动惯量

将待测试样（圆盘、圆环、圆柱）放上载物台并使试样几何中心轴与转轴中心重合，按与测量 J_1 同样的方法可分别测量未加法码的角加速度 β_3 与加砝码后的角加速度 β_4 。由（5）式可计算 J_2 的值，已知 J_1 、 J_2 ，由（6）式可计算试样的转动惯量 J_3 ，并与理论值比较。

测量值 J_3 的相对误差：

$$E = \frac{J_3 - J}{J} \times 100\% \tag{13}$$

4. 验证平行轴定理

将两圆柱体对称插入载物台上与中心距离为 d 的圆孔中，测量并计算两圆柱体在此位置的转动惯量。将测量值与由（11）、（10）式所得的计算值比较，若一致即验证了平行轴定理。

【数据记录参考表格】

表 1 测量实验台的角加速度

匀减速						匀加速 R _{塔轮} =_____mm m _{砝码} =_____g					
k	1	2	3	4	平均	k	1	2	3	4	平均
t (s)						t (s)					
k	5	6	7	8		k	5	6	7	8	
t (s)						t (s)					
$\beta_1(1/s^2)$						$\beta_2(1/s^2)$					

表 2 测量实验台加圆环后的角加速度 R_外=_____mm, R_内=_____mm, m_{圆环}=432_g

匀减速						匀加速 R _{塔轮} =_____mm m _{砝码} =_____g					
k	1	2	3	4		k	1	2	3	4	

t (s)					平均	t (s)					平均
k	5	6	7	8		k	5	6	7	8	
t (s)						t (s)					
$\beta_3 (1/s^2)$						$\beta_4 (1/s^2)$					

表 3 测量实验台加圆盘后的角加速度 $R = 119.8 \text{ mm}$, $m_{\text{圆环}} = 515.4 \text{ g}$

匀减速						匀加速 $R_{\text{塔轮}} = \text{mm}$ $m_{\text{砝码}} = \text{g}$					
k	1	2	3	4	平均	k	1	2	3	4	平均
t (s)						t (s)					
k	5	6	7	8		k	5	6	7	8	
t (s)						t (s)					
$\beta_3 (1/s^2)$						$\beta_4 (1/s^2)$					

表 4 测量两圆柱中心与转轴距离 $d = \text{mm}$ 时的角加速度 $R_{\text{圆柱}} = 15 \text{ mm}$, $m_{\text{圆柱}} \times 2 = 331 \text{ g}$

匀减速						匀加速 $R_{\text{塔轮}} = \text{mm}$ $m_{\text{砝码}} = \text{g}$					
k	1	2	3	4	平均	k	1	2	3	4	平均
t (s)						t (s)					
k	5	6	7	8		k	5	6	7	8	
t (s)						t (s)					
$\beta_3 (1/s^2)$						$\beta_4 (1/s^2)$					

说明：

试样的转动惯量是根据公式 $J_3 = J_2 - J_1$ 间接测量而得，由标准误差的传递公式有 $\Delta J_3 = (\Delta J_2^2 + \Delta J_1^2)^{1/2}$ 。当试样的转动惯量远小于实验台的转动惯量时，误差的传递可能使测量的相对误差增大。

理论上，同一待测样品的转动惯量不随转动力矩的变化而变化。改变塔轮半径或砝码质量（五个塔轮，五个砝码）可得到 25 种组合，形成不同的力矩。可改变实验条件进行测量并对数据进行分析，探索其规律，寻求发生误差的原因，探索测量的最佳条件。

【预习思考题】

1. 简述本实验测量转动惯量的思路。
2. 本实验中做了哪些条件近似？

【分析讨论题】

1. 三种试样绕中心轴的转动惯量，哪种测量误差最大？分析其原因。
2. 实验中不同样品的摩擦力矩是否为定值，为什么？